<u>Ecuaciones de 1^{er} y 2º grado</u>

Antes de empezar a resolver estos tipos de ecuaciones hemos de hacer una serie de definiciones previas, que irán acompañadas por algunos ejemplos.

Una **igualdad algebraica** está formada por dos expresiones algebraicas (números y letras) separadas por un signo de igualdad. Pueden aparecer de dos tipos diferentes:

a) **Identidad**: cuando la igualdad es cierta para cualquier valor de las variables
$3x + 2x = 5x$

b) **Ecuación**: cuando la igualdad sólo se cumple para algunos valores de las letras
$2x – 4x = 2$

En nuestro caso nos interesan más las **ecuaciones**. Por eso vamos a ver como se conocen a los elementos de ellas:

→ Se llaman **miembros** de la ecuación a cada una de las expresiones algebraicas que hay a cada lado de la igualdad.

→ Cada sumando de una ecuación se llama **término**. Los números se denominan **términos independientes.**

→ Las **incógnitas** son las letras o variables que figuran en los términos (en estos casos aparecerá la letra x).

→ **Resolver** una ecuación es encontrar los valores numéricos (**soluciones**) de la incógnita que verifican la igualdad.

→ El **grado** de una ecuación es el exponente máximo con el que figura la incógnita después de realizar las operaciones que se indican en ella.

Se dice que dos o más ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones (como mucho el número de soluciones coincide con el del grado de la ecuación). Para obtener ecuaciones equivalentes basta con sumar, restar, multiplicar o dividir por los mismos números o expresiones en ambos miembros de la igualdad. Por ejemplo:

$3x-3=6$ cuya solución es **x = 3** es equivalente a

$3x-3+3=6+3 \Rightarrow 3x=9$ que también equivale a

$$\frac{3x}{3}-\frac{3}{3}=\frac{6}{3} \Rightarrow x-1=2$$

1.- Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma **ax + b = 0**, donde **a** y **b** pueden ser números reales. Este tipo de ecuaciones tendrán una única solución cuando el valor de **a** sea distinto de 0, en caso contrario, no tiene solución (siempre que **b** no sea 0). Ejemplos de ecuaciones de primer grado son:

$2x-3=0$ $\qquad$ $3x-5=16$ $\qquad$ $2x+4=5x-7$

Para resolver este tipo de ecuaciones vamos a explicar los pasos del método general de resolución, los cuales se usarán según la complejidad que presente la ecuación. Los pasos a seguir son los siguientes:

1) **Quitar denominadores**, calculando el mcm de los denominadores y multiplicando ambos miembros de la ecuación por él. Por ejemplo, dada la ecuación

   $\frac{3x-2}{5}+\frac{2x}{3}=\frac{3}{5}$ su mcm sería 15 por lo que se obtendría

   $15\left(\frac{3x-2}{5}\right)+15\left(\frac{2x}{3}\right)=15\left(\frac{3}{5}\right)$ y operando se obtiene

   $3(3x-2)+5(2x)=3(3)$

2) **Eliminar paréntesis**, teniendo en cuenta que el signo que precede al paréntesis es negativo, hemos de cambiar el signo a todos los términos del interior de él. Con el ejemplo anterior realizamos las multiplicaciones y obtenemos

   $9x-6+10x=9$

3) **Transponer términos**, llevando los valores con x a un miembro y los términos independientes al otro. Hemos de tener en cuenta para hacer esto lo siguiente: si un término esta sumando o multiplicando pasa hacia el otro miembro restando o dividiendo. Siguiendo con el ejemplo anterior obtenemos

   $9x+10x=6+9$

4) **Reducir los términos semejantes** en cada miembro, realizando las operaciones que nos aparezcan. Siguiendo con el ejemplo se obtiene (sumando las x y los números)

   $19x=15$

5) **Despejar la incógnita** y hallar la solución. Para ello hemos de pasar el coeficiente de la x que esta multiplicando al otro miembro, a donde pasaría dividiendo, obteniendo así la solución de la ecuación

   $x=\frac{15}{19}$ la cual no se puede simplificar

6) **Comprobar que la solución obtenida es la correcta**, para lo que hemos de sustituir el valor de la x obtenida en la ecuación de partida

   $\frac{3x-2}{5}+\frac{2x}{3}=\frac{3}{5}$ se sustituye x por el valor obtenido y así

$$\frac{3\left(\frac{15}{19}\right)-2}{5}+\frac{2\left(\frac{15}{19}\right)}{3}=\frac{3}{5}$$ se realizan las operaciones y obtenemos

$$\frac{\frac{7}{19}}{5}+\frac{\frac{30}{19}}{3}=\frac{7}{95}+\frac{30}{57}=\{hallamos\,el\;mcm\}=\frac{21}{285}+\frac{150}{285}=\frac{171}{285}=(simplifico)=\frac{3}{5}$$ lo buscado.

2.- Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado** con una incógnita es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, donde **a**, **b** y **c** son números reales y **a** es distinta de 0. Según los valores de los coeficientes **a**, **b** y **c**, las ecuaciones de segundo grado pueden ser completas o incompletas (cuando b o c son nulos). Ejemplos de estas ecuaciones son:

$$2x^2+3x-4=0 \qquad 3x^2-8=-2x \qquad 3x(x+5)=0 \qquad 2x^2+32=0$$

Una ecuación de segundo grado es **completa** cuando todos sus coeficientes son distintos de cero. Para obtener sus soluciones utilizamos la siguiente fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{cases}$$ así se obtienen las dos posibles soluciones

Como nos aparece una raíz cuadrada en el numerador, solo podremos obtener soluciones reales cuando dicho valor sea no negativo. De este modo podemos podremos saber cuantas soluciones tendremos sin necesidad de hallarlas.

El radicando $\mathbf{b^2 – 4ac}$ se denomina **discriminante** y se simboliza por la letra griega Δ**.** El número de soluciones o raíces depende del signo del discriminante. Así pues:

$$\Delta=b^2-4ac=\begin{cases} >0 \rightarrow 2\ soluciones\ dist\operatorname{int}as \\ =0 \rightarrow 1\ raíz\ doble \\ <0 \rightarrow no\ tiene\ soluciones\ reales\end{cases}$$

Una ecuación de segundo grado es **incompleta** si los coeficientes **b** o **c** son cero. Se obtienen así tres tipos de ecuaciones de 2º grado incompletas:

→ Si **c = 0**, la ecuación es de la forma $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$, que se resuelve sacando factor común.

$$x(ax+b)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ ax+b=0\rightarrow x=-\dfrac{b}{a}\end{cases}$$

→ Si **b = 0**, la ecuación es de la forma **ax² + c = 0**, que se resuelve despejando la incógnita x.

$$ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

→ Si **b = 0** y **c = 0**, la ecuación es de la forma **ax² = 0**, que posee la raíz doble **x = 0**.

3.- Relación de ejercicios

1.- Indica el grado de cada ecuación:

a) $2x - 5 = 4(x + 9)$

b) $7(x - 1)(x + 3) = 4$

c) $x^2 + x - 1 = x^2 - 2x$

2.- Resuelve estas ecuaciones de primer grado:

a) 10 – x = 3 **b)** 3x + 7 = 10 **c)** 4x + 5 = -3x + 12

d) 10x + 2 = 9x + 1 **e)** x – 5(x – 2) = 6 **f)** 3(x + 8) = 6(x – 2) + 24

g) $\frac{3x + 15}{6} = -7$ **h)** $\frac{3x}{2} + 20 = x + 25$

i) $\frac{x-5}{5} + \frac{8-x}{2} + \frac{2x-10}{2} = 3$ **j)** $\frac{x-2}{6} - \left(\frac{x+1}{3}\right) - \left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

k) $3\left(x - \frac{2}{3}\right) + 4(2x-1) = \frac{x+4}{7} - 2(x+4)$ **l)** $-\frac{x}{2} + \frac{x-1}{4} = 3x + \frac{3}{2}$

3.- Determina el número de soluciones y resuélvelas:

a) $x^2 = 7x - 12$ **b)** $x^2 - x = 20$ **c)** $x^2 - 4x + 4 = 0$

d) $16x(x - 5) = 0$ **e)** $x^2 - 7x + \frac{13}{4} = 0$ **f)** $x^2 + 6x = -9$

g) $x^2 + 2x = 0$ **h)** $4x^2 + 7x = 9x$ **i)** $2x^2 + 3x - 4 = x^2 + 2 + 2x$

4.- Resuelve por el método más adecuado:

a) $x^2 - 7x = 0$ **b)** $(2x+3)(2x-3) = 135$ **c)** $x(3x-2) = 65$

d) $2x^2 - 72 = 0$ **e)** $\frac{x^2}{2} - \left(\frac{3x}{5}\right) = \frac{1}{5} - \left(\frac{x}{6}\right)$ **f)** $2x^2 + 10x - 48 = 0$

g) $(x+1)(x-3) + 3 = 0$ **h)** $3x^2 + 24x + 45 = 0$ **i)** $x^2 + 9 = 10x$

5.- Calcula un número tal que su doble y su triple suman 10.

6.- Halla el número que sumado al cuadrado de su quinta parte nos da 6.